ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

ECUACIONES

ECUACIONES POLINOMICAS Y DE GRADO SUPERIOR

ECUACIONES

Objetivos:

- ✓ Manejar las definiciones básicas sobre ecuaciones polinomiales.
- ✓ Resolver eficientemente las ecuaciones polinomiales mas comunes.
- ✓ Desarrollar destrezas en la resolución de problemas tipo referidos al tema de ecuaciones.

ECUACIONES

ECUACIÓN

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, donde esta presente al menos una variable ahora llamada incógnita.

Ejemplo:

- $x^2 = x + 12$
- $sen(x) = 0$
- $|2x - 3y| = -1$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Es el valor que al reemplazarla por la incógnita en la ecuación, su igualdad se verifica.

Ejemplo:

- $x^2 = x + 12$ una solución es el 4, veamos:

$x = 4$: $4^2 = 4 + 12$ ¡se verifica!

Ejercicio

Si $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$ son soluciones de la ecuación $x^4 - ax^2 + b = 0$, halle $a - b$.

Resolución

Por ser -1 solución, este verifica la ecuación:

$$(-1)^4 - a(-1)^2 + b = 0$$

Operando:

$$1 - a.1 + b = 0$$

$$\therefore \quad a - b = 1$$

ECUACIÓN POLINOMIAL

$$\boxed{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0} \qquad a_0 \neq 0$$

donde: x es la incógnita

$a_0;\ a_1; \ldots;\ a_n$ son los coeficientes

ECUACIONES

RAÍZ DE UN POLINOMIO

α es raíz del polinomio $P(x) \leftrightarrow P(\alpha) = 0$

Ejemplos

- $P(x) = 3x - 15$

  5 es raíz del polinomio pues: $P(5) = 0$

- $M(x) = x^2 + x - 2$

  1 es raíz del polinomio pues:

  $$M(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0$$

  -2 es raíz del polinomio pues:

  $$M(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$$

Nota:

Factorice el polinomio para determinarla con facilidad cuales son sus raíces.

- $N(x) = (x-2)(x-\sqrt{3})(x+1)$

  Sus raíces son: $2, \sqrt{3}, -1$

MULTIPLICIDAD DE UNA RAIZ

Es la cantidad de veces que un número se repite como raíz del polinomio.

Ejemplos

- $P_{(x)} = (x-8)(x-5)^2(x+1)^3$

$\rightarrow P_{(x)} = (x-8)(x-5)(x-5)(x+1)(x+1)(x+1)$

Sus raíces son: $8, 5, 5, -1, -1, -1$

Raíz simple

Raíz de multiplicidad dos o raíz doble

Raíz de multiplicidad tres o raíz triple

ECUACIONES

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio de grado $n \geq 1$, posee al menos una raíz.

Corolario:

Todo polinomio de grado $n \geq 1$, tiene exactamente n raíces (contadas con la multiplicidad).

Ejemplos:

- $P(x) = 2x - 3$ tiene 1 raíz
- $R(x) = x^2 + 2x - 3$ tiene 2 raíces
- $Q(x) = 2x^3 - 11x + 9$ tiene 3 raíces

TEOREMA DEL FACTOR

α es raíz de $P_{(x)} \leftrightarrow (x - \alpha)$ es factor de $P_{(x)}$

Ejemplos:

- Si 2 es raíz de $P(x) \rightarrow (x - 2)$ es factor de $P_{(x)}$

  $\rightarrow$ existe $q(x)$ tal que: $P_{(x)} = (x - 2)\,q(x)$

- Si 5 es raíz doble de $S(x) \rightarrow (x - 5)^2$ es factor

  $\rightarrow$ existe $Q(x)$ tal que: $S_{(x)} = (x - 5)^2\ Q(x)$

- Si -3 es una raíz y 6 es una raíz triple de $M(x)$

  $\rightarrow$ $M_{(x)} = (x + 3)(x - 6)^3\, q(x)$

Nota: Las raíces del polinomio $P(x)$ son soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

- $(x - 6)(x + 3)$ $\qquad$ $(x - 6)(x + 3) = 0$

  Raíces: $6, -3$ $\qquad$ Soluciones: $6, -3$

- $(x - 5)^2(x - 7)^3$ $\qquad$ $(x - 5)^2(x - 7)^3 = 0$

  Raíces: $5, 5, 7, 7, 7$ $\qquad$ Soluciones: $5,\ 7$

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Su forma general es:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad a \neq 0$$

RESOLUCIÓN:

1) Por factorización:

Resolver:

$$2x^2 + 6 = ix$$

Resolución

Forma general: $2x^2 - ix + 6 = 0$

Factorice: $2x^2 - ix - 6i^2 = 0$

$$\begin{array}{ll} 2x & +3i \\ x & -2i \end{array}$$

$$(2x + 3i)(x - 2i) = 0$$

Iguale a cero los factores:

$$x = -\frac{3i}{2} \quad \vee \quad x = 2i$$

$$\therefore \quad CS = \left\{-\frac{3i}{2}; 2i\right\}$$

2) Por fórmula general:

Las dos raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$$

son:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Donde: $\Delta = b^2 - 4ac$ y es llamado **Discriminante**

ECUACIONES

NATURALEZA DE SUS RAÍCES:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Considerando los coeficientes reales

$\Delta > 0$	Raíces reales diferentes
$\Delta = 0$	Raíces reales e iguales (única solución)
$\Delta < 0$	Raíces imaginarias conjugadas

PROPIEDADES (Teorema de Cardano):

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Se cumple:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$
$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$	

DEFINICIONES:

1) Las raíces x_1 y x_2 serán llamadas:

Raíces *simétricas* si $x_1 + x_2 = 0$

Raíz de *recíprocas* si $x_1 \cdot x_2 = 1$

2) Dos ecuaciones se dice que son *equivalentes* si tienen el mismo conjuntos soluciones.

ECUACIÓN BICUADRADA

Su forma general es:

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0} \quad abc \neq 0$$

RESOLUCIÓN

1) Por factorización:

Resolver:

$$4x^4 - 101x^2 + 25 = 0$$

Resolución

Factoricemos: $4x^4 - 101x^2 + 25 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 4x^2 & & -1 \\ x^2 & & -25 \end{array}$$

$$(4x^2 - 1)(x^2 - 25) = 0$$

$$(2x + 1)(2x - 1)(x + 5)(x - 5) = 0$$

Iguale a cero los factores:

$$x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -5 \quad \vee \quad x = 5$$

$$\therefore \quad CS = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -5; 5\right\}$$

2) Por cambio de variable:

Resolver:

$$x^4 - 2x^2 - 4 = 0$$

Resolución

Como no es factorizable, realizamos un cambio de variable:

Sea $x^2 = t \longrightarrow x^4 = t^2$

Reemplazando:

$$t^2 - 2t - 4 = 0$$

Por fórmula general de la ecuación cuadrática:

$$t = 1 + \sqrt{5} \quad \vee \quad t = 1 - \sqrt{5}$$

Pero $x^2 = t$ entonces

$$x^2 = 1 + \sqrt{5} \quad \vee \quad x^2 = 1 - \sqrt{5}$$

$$x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{5}} \quad \vee \quad x = \pm\sqrt{1 - \sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad CS = \left\{\sqrt{1 + \sqrt{5}}; -\sqrt{1 + \sqrt{5}}; \sqrt{1 - \sqrt{5}}; -\sqrt{1 - \sqrt{5}}\right\}$$

ECUACIONES

PROPIEDADES:

1) Las raíces tienen la forma siguiente :

$$\alpha;\ -\alpha;\ \ \beta;\ -\beta$$

2) Por Cardano:

$\alpha^2+\beta^2=-\dfrac{b}{a}$	$\alpha^2\cdot\beta^2=\dfrac{c}{a}$

3) Si sus raíces están en progresión aritmética estas tienen la forma siguiente:

$$\alpha;\ -\alpha;\ \ 3\alpha;\ -3\alpha$$

Ejercicio

Si las raíces de la ecuación bicuadrada

$$3x^4-30x^2+n=0$$

se encuentran en progresión aritmética. Calcule n

Resolución Sus raíces son: $\alpha;\ -\alpha;\ \ 3\alpha;\ -3\alpha$

Por Cardano:

$$\alpha^2+(3\alpha)^2=\frac{30}{3}\longrightarrow 10\alpha^2=10\longrightarrow \alpha^2=1$$

$$\alpha^2.(3\alpha)^2=\frac{n}{3}\longrightarrow \alpha^2.9\alpha^2=\frac{n}{3}\qquad\therefore\ n=27$$

ECUACIÓN POLINOMIAL DE GRADO SUPERIOR

Su forma general es:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\qquad a_0\neq 0$$

es llamada ecuación polinomial de grado n.

- Tiene n raíces.
- Tiene m soluciones $(1\leq m\leq n)$.

Ejemplos:

- $2x^3+x^2+x-4=0$ Ecuación cúbica
- $x^4+x^3+x-3=0$ Ecuación de cuarto grado o cuártica.

RESOLUCIÓN (para problemas tipo)

i. Darle su forma general.

II. Factorice.

iii. Iguale a cero cada factor para encontrar las raíces.

iv. Indique el conjunto solución.

Ejercicio : Resolver:

$$x^3 + 6 = 3x^2 + 2x$$

Resolución

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$x^2(x-3) - 2(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2-2) = 0$$

$$(x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -\sqrt{2} \quad \vee \quad x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad CS = \{3; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

TEOREMA DE CARDANO-VIETTE

Si $x_1;\ x_2;\ x_3$ son las raíces de la ecuación

$+ \quad - \quad + \quad -$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ ;\ a \neq 0$$

Se cumple que:

S_1:	$x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$
S_2:	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a}$
S_3:	$x_1.x_2.x_3 = -\dfrac{d}{a}$
S_{-1}:	$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = -\dfrac{c}{d}$

TEOREMAS DE PARIDAD DE RAÍCES

1) Sea una ecuación polinomial de coeficientes racionales, se cumple:

$$a+\sqrt{b} \text{ es raíz} \quad \leftrightarrow \quad a-\sqrt{b} \text{ es raíz}$$

Donde $a, b \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b} \in I$

2) Sea una ecuación polinomial de coeficientes reales, se cumple:

$$a+bi \text{ es raíz} \quad \leftrightarrow \quad a-bi \text{ es raíz}$$

Donde $a, b \in \mathbb{R}$; $b \neq 0$ y $i=\sqrt{-1}$

3) Sea una ecuación polinomial de coeficientes reales, se cumple:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{a}-\sqrt{b} \\ -\sqrt{a}+\sqrt{b} \\ -\sqrt{a}-\sqrt{b} \end{cases}$$

Donde:

$a, b \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{a}, \sqrt{b} \in I$

Ejercicio :

Sea la ecuación $2x^3-10x^2+ax+b=0$, donde $2+\sqrt{3}$ es raíz y $a, b \in \mathbb{Q}$. Halle el valor de $a+b$.

Resolución

La ecuación tiene 3 raíces:

$x_1 = 2+\sqrt{3}$ (Dato)

$x_2 = 2-\sqrt{3}$ (Por paridad de raíces)

$x_3 = ?$

Por el teorema de Cardano: $\underbrace{x_1+x_2}+x_3=5$

Entonces $4+x_3=5$

$\rightarrow x_3 = 1$

Reemplazando en la ecuación:

$2\cdot 1^3-10\cdot 1^2+a\cdot 1+b=0$

$\therefore \; a+b=8$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

ECUACIONES

1. Resuelva la ecuación

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x}{16}+\ldots-\frac{x}{1024}=\frac{1023}{1024}$$

A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ C) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

D) $\{2\}$ E) $\{3\}$

SOLUCION

Factorizando x en el primer miembro y expresando todo en forma de potencias

$$x\left(\left(\frac{1}{2}\right)^1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots..-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)=\frac{1023}{1024}$$

por cocientes notables:

$$x\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots..-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right)\right)=\frac{1023}{1024}$$

$$x\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1023}{1024}$$

$$x\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1023*2}{3*1024}\right)=\frac{1023}{1024} \quad \rightarrow x=3$$

$\therefore$ C.S = {3}

2. Si z_1, z_2 son raíces de la ecuación $4z-(3+9i)=(1-i)z^2; z_1 \in \mathbb{R}$ determine $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$.

A) 3 B) 1/3 C) $\sqrt{3}$

D) 5 E) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

SOLUCION

Ordenando la ecuación: $(1\text{-}i)z^2 - 4z + (3+9i) = 0$

Sea "$z_1 = a$" la raíz real, por definición de raíz $(1\text{-}i)a^2 - 4a + 3 + 9i = 0$

Ordenando: $(a^2 - 4a + 3) + (-a^2 + 9)i = 0$

Se cumple: $a^2 - 4a + 3 = 0 \wedge -a^2 + 9 = 0$

$(a = 3 \vee a = 1) \wedge (a=3 \vee a = -3) \rightarrow a = 3$

$\rightarrow z_1 = 3$

Además: $z_1 + z_2 = \frac{4}{1-i} = 2 + 2i$

$3 + z_2 = 2 + 2i$

$\rightarrow z_2 = -1 + 2i$

Se pide: $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

3. Si en la ecuación $2x^2+3x+m=0$, las raíces difieren en 1. Determine $E=\dfrac{m}{m+2}$.

A) $\dfrac{5}{16}$ B) $\dfrac{5}{21}$ C) $\dfrac{16}{21}$

D) $\dfrac{21}{16}$ E) $\dfrac{1}{5}$

SOLUCION

Cardano:

$x_1 + x_2 = -3/2$

Además:

$x_1 - x_2 = 1 \quad (dato)$

Resolviendo el sistema: $x_1 = -\frac{1}{4} \wedge x_2 = -\frac{5}{4}$

Luego por Cardano: $\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{m}{2} \rightarrow m = \frac{5}{8}$

Se pide: $E=\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{5}{8}+2} = \dfrac{5}{21}$

4. Las ecuaciones $(x-\alpha)^5\cdot(x-3)^4=0$

$x^3-3\beta x^2+3\beta^2x-\beta^3=0$

son equivalentes. Calcule $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}$.

A) 2/3 B) 3/4 C) 1/7

D) 1 E) 2

SOLUCION

De la primera ecuación:

$C.S_1=\{\propto;3\}$

De la segunda ecuación se observa que la ecuacion es un binomio al cubo:

$(x-\beta)^3 \rightarrow C.S_2=\{\beta\}$

Por ser ecuaciones equivalentes:

$$C.S_1=C.S_2$$

$\{\propto;3\}=\{\beta\}\rightarrow\propto=\beta=3$

luego: $E=\dfrac{3+3}{3+6}=\dfrac{2}{3}$

5. Si $\alpha \wedge \beta$ son dos raíces de $P_{(x)}=x^3-2x+m$, tal que $\alpha+\beta=-1$, determine el valor de $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$.

A) 3 B) 2 C) –3
D) –1 E) –2

SOLUCION

Por Cardano: $\propto +\beta + x_3 = 0$

por dato: $\propto +\beta = -1 \rightarrow x_3 = 1$

Por definición de raíz: $1^3 - 2(1) + m = 0$

$\rightarrow m = 1$

Por Cardano: $\propto \beta(1) = -m = -1$

$\rightarrow \propto \beta = -1$

Se pide:

$$\frac{\propto}{\beta}+\frac{\beta}{\propto}=\frac{\propto^2+\beta^2}{\propto\beta}=\frac{(\propto+\beta)^2-2\propto\beta}{\propto\beta}$$

Reemplazando lo obtenido:

$$\frac{\propto}{\beta}+\frac{\beta}{\propto}=\frac{(-1)^2-2(-1)}{(-1)}=-3$$

6. Si $5+\sqrt{5}$ es raíz del polinomio $P_{(x)}=x^3+(3m+2n-8)x^2-(5m-3n-15)x+80$; $\{m,n\}\subset\mathbb{Q}$; halle el valor de $17m+5n$.

A) 43 B) 41 C) 42
D) 44 E) 45

SOLUCION

Por dato una raíz es: $x_1 = 5+\sqrt{5}$

Por paridad: $x_2 = 5-\sqrt{5}$

Por Cardano: $(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})x_3 = -80 \quad \rightarrow x_3 = -4$

Por Cardano:

$$5+\sqrt{5}+5-\sqrt{5}+(-4) = -(3m+2n-8) \quad \rightarrow 3m+2n=2$$

$$(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})+(-4)(5+\sqrt{5})+(-4)(5-\sqrt{5}) = -(5m-3n-15)$$

$$\rightarrow 5m-3n=35$$

Resolviendo el sistema: m=4 ∧ n=-5

Se pide: 17m+5n=17(4)+5(-5)= 43

7. Dos raíces de una ecuación polinomial de coeficientes enteros mónicos y de cuarto grado son $\frac{5}{1+2i}$; $\frac{5}{2+i}$. Halle el producto de sus raíces.

A) -5 B) 5 C) 25
D) 0 E) -25

SOLUCION

Dato del problema:

$$x_1 = \frac{5}{1+2i} * \frac{1-2i}{1-2i} = 1-2i$$

Por paridad: $x_2 = 1+2i$ *también es raíz*

Por dato: $x_3 = \frac{5}{2+i} * \frac{2-i}{2-i} = 2-i$

por paridad: $x_4 = 2+i$ *también es raíz*

Se pide: $x_1x_2x_3x_4 = (1-2i)(1+2i)(2-i)(2+i) = 25$

8. Sea la ecuación bicuadrada $3x^4-5x^2+1=0$ de raíces x_1, x_2, x_3, x_4. Determine $E = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

A) $\frac{15}{17}$ B) 5 C) $\frac{38}{9}$

D) $\frac{17}{18}$ E) $\frac{19}{18}$

SOLUCION

Por teoría: C.S = $\{\propto; -\propto; \beta; -\beta\}$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

Por teorema: * $\propto(-\propto) + \beta(-\beta) = -\frac{5}{3}$

$\rightarrow \propto^2 + \beta^2 = \frac{5}{3}$

• $(\propto)(-\propto)(\beta)(-\beta) = -\frac{1}{3}$

$\rightarrow \propto^2 \beta^2 = \frac{1}{3}$

Se pide:

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 + x_3{}^4 + x_4{}^4 = \propto^4 + (-\propto)^4 + \beta^4 + (-\beta)^4 = 2(\propto^4 + \beta^4) \ldots (1)$$

Se sabe: $(\propto^2 + \beta^2)^2 = \propto^4 + 2\propto^2\beta^2 + \beta^4$

Reemplazando datos: $(\frac{5}{3})^2 = \propto^4 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + \beta^4$

Entonces: $\propto^4 + \beta^4 = \frac{19}{9}$

Finalmente: $x_1{}^4 + x_2{}^4 + x_3{}^4 + x_4{}^4 = 2\left(\frac{19}{9}\right) = \frac{38}{9}$

9. Con respecto a la ecuación polinomial de coeficientes reales

$ax^4+bx^2+c=0 \ \wedge \ a \neq 0$

indique las proposiciones que son correctas.

I. Si $b^2 > 4ac \rightarrow$ sus raíces son reales.

II. Si $b^2 < 4ac \rightarrow$ sus raíces son imaginarias.

III. Si $b^2 > 4ac \ \wedge \ \frac{b}{a} < 0 \ \wedge \ \frac{c}{a} > 0$ entonces sus raíces son reales.

A) II y III B) I, II y III C) solo III
D) solo I E) I y II

SOLUCION

Sea: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Se sabe: $x_{1;2;3;4} = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

Si : $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$ *sus raices pueden ser reales o imaginarias*

contraejemplo:

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; $b^2 - 4ac > 0$, *hay 2 raíces reales y 2 imaginarias*

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$; $b^2 - 4ac > 0$; *hay 4 raíces reales*

Si : $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$ *todas sus raíces son imaginarias*

Si : $b^2 - 4ac > 0 \wedge \frac{b}{a} < 0 \wedge \frac{c}{a} > 0 \rightarrow$ *todas sus raices son reales*

De acuerdo a ello:

I) F II) V III) v

10. El polinomio

$P_{(x)}=x^4+ax^3-20x^2+bx+c$

tiene como raíz doble a -3 y como una raíz simple a 5. Calcule el valor de $ac-b$.

A) -24 B) -32 C) -12
D) -20 E) -18

SOLUCION

-3 es una raíz doble
5 es una raíz simple

Luego por el teorema del factor y raíz de multiplicidad

$$P(x) = (x+3)^2(x-5)Q(x)$$

Luego: $\frac{P(x)}{(x+3)^2(x-5)}$ *es una división exacta.*

$$\frac{x^4+ax^3-20x^2+bx+c}{x^3+x^2-21x-45}$$

Por Hoorner:

1	1	a	-20	b	c
-1		-1	21	45	
21		a-1	1-a	21(a-1)	45(a-1)
45					
	1	a-1	0	0	0

Se cumple:

-20 + 21 + 1 - a = 0 $\rightarrow$ a = 2

c + 45(2-1) = 0 $\rightarrow c = -45$

b + 45 + 21(2-1) = 0 $\rightarrow b = -66$

Se pide: ac - b = 2(-45) -(-66) =-90+66= -24

11. Luego de resolver la ecuación

$x^2-(4+3i)x+1+7i=0$

se obtiene como conjunto solución a $\{x_1; x_2\}$.

Determine el valor de $|x_1|^2+|x_2|^2$.

A) 12 B) 21 C) 17

D) 15 E) 13

SOLUCION

Aplicando la fórmula general:

$$x_{1;2} = \frac{(4+3i) \pm \sqrt{(4+3i)^2-4(1)(1+7i)}}{2}$$

$$x_{1;2} = \frac{(4+3i) \pm (2-i)}{2} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3+i \\ x_2 = 1+2i \end{array}$$

Luego: $|x_1|^2+|x_2|^2 = 10+5 = 15$

12. Si se tiene que

$$\pi\alpha^3+\sqrt{2}\alpha^2+\sqrt{3}\alpha+\sqrt{5}=0$$

$$\pi\beta^3+\sqrt{2}\beta^2+\sqrt{3}\beta+\sqrt{5}=0$$

$$\pi\theta^3+\sqrt{2}\theta^2+\sqrt{3}\theta+\sqrt{5}=0$$

determine el valor de $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\beta\theta}$.

A) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

SOLUCION

De los datos:

$$\pi x^3+\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x+\sqrt{5}=0$$

Donde: C.S = $\{\propto;\beta;\theta\}$

Cardano:

$$\propto+\beta+\theta=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\propto\beta+\beta\theta+\propto\theta=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

$$\propto\beta\theta=-\frac{\sqrt{5}}{\pi}$$

Se pide

$$S=\frac{\theta+\beta+\alpha}{\alpha\beta\theta}$$

$$S=\frac{\alpha+\beta+\theta}{\alpha\beta\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{\pi}}{-\frac{\sqrt{5}}{\pi}}$$

$$S=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$S=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

13. Resuelva la ecuación

$$x^6-6x^5+14x^4-18x^3+14x^2-6x+1=0$$

A) $CS=\left\{1;\frac{1+\sqrt{3}i}{2};\frac{1-\sqrt{3}i}{2};\frac{2+\sqrt{5}}{2};\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right\}$

B) $CS=\left\{1;\frac{1+\sqrt{3}i}{4};\frac{1-\sqrt{3}i}{4};\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

C) $CS=\left\{1;\frac{1-\sqrt{3}}{4};\frac{1+\sqrt{3}}{4};\frac{3+\sqrt{5}i}{2};\frac{3-\sqrt{5}i}{2}\right\}$

D) $CS=\left\{1;\frac{1-\sqrt{3}i}{2};\frac{1-\sqrt{3}i}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

E) $CS=\left\{1;\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{3+\sqrt{5}i}{3};\frac{3-\sqrt{5}i}{3}\right\}$

SOLUCION

14. Con respecto a las raíces de la ecuación

$$6x^5+7x^4-4x^3-x^2+5x+2=0$$

indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. Todas sus raíces reales son negativas.

II. Presenta 2 raíces imaginarias conjugadas.

III. Presenta solo una raíz irracional perteneciente al intervalo $\langle -2; -1 \rangle$.

A) VVV B) VFF C) FFF

D) FVV E) VVF

SOLUCION

15. Si x_1; x_2; x_3; ...; x_n son raíces de la ecuación polinomial $x^n - x^2 + 1 = 0$, calcule el valor de

$$\left(1-x_1^2\right)^6\left(1-x_2^2\right)^6\left(1-x_3^2\right)^6 \ldots \left(1-x_n^2\right)^6$$

A) n B) $(-1)^n$ C) $(-2)^n$

D) 1 E) 6

SOLUCION

16. Determine la condición para que las ecuaciones $x^3+2x+a=0$ y $x^2+x+b=0$ presenten una raíz en común.

A) $(b+a)^2+(b-2)(b^2-3b+a)=0$

B) $(b+a)^2+(b-3)(b^2-2b+a)=0$

C) $(b-a)^2+(b-3)(b^2-2b-a)=0$

D) $(b-a)^2+(b-2)(b^2-2b+a)=0$

E) $(b+a)^2+(b-3)(b^2-2a+b)=0$

SOLUCION

17. Determine la suma de los valores de n para que la ecuación

$$(x^2-x-6)(x^2-4x+n)=0$$

presente solo 3 soluciones.

A) 4 B) -5 C) -9
D) -6 E) 8

SOLUCION

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS